Institut de Recherche d'Enseignement des Sciences
Groupe d'Histoire et Epistémologie des Mathématiques

Preuves visuelles

Fascicule n°3 pour le professeur : À propos du théorème d'Al-Kashi

Ghiyath ad-Din Jamshid Mas`ud al-Kashi

Astronome et mathématicien

« *L'un des derniers grands savants en terre d'Islam* »

Table des matières

1. Comment motiver l'intérêt des élèves pour l'étude de ce théorème ? …………3

2. Le théorème dans l'histoire ……………………………………………………………………….3

   2.1. Pourquoi ce théorème porte-t-il son nom en France ? ………………………………….3

   2.2. Quelques traces du théorème à travers l'histoire ………………………………………….3

3. Al-Kashi, sa vie, ses travaux ……………………………………………………………..........4

   3.1. La biographie de Ghiyath ad-Din Jamshid Mas`ud al-Kashi (1380 – 1429) ……….4

   3.2. Ce que l'on doit à al-Kashi ……………………………………………………………………………4

      3.2.1. *La clef de l'arithmétique* (*Miftah al hisab*, 1427)

      3.2.2. Traité sur la circonférence (*Risala al-mouhitiah*, 1424)

      3.2.3. Traité sur la corde et le sinus (Watar va Jaïb)

      3.2.4. Les tables astronomiques (Zij-e-Khaqâni, 1413-1414)

4. L'initiation des élèves à la démonstration ………………………………………………6

   4.1 Présentation des vidéos ……………………………………………………………………………6

   4.2 Différentes démonstrations du théorème ……………………………………………..………7

Annexes …………………………………………………..11

Annexe 1 : Une application pratique de résolution des triangles ………………….……11

Annexe 2 : Étude de textes historiques courts accessibles aux élèves ……………………….13

Annexe 3 : Quelques repères sur les mathématiques arabes …………………………………….14

Annexe 4 : Méthode d'approximation de sin 1° par al-Kashi…………………………………….14

Bibliographie ……………………………………………..15

Sitographie ……………………………………………….15

1. Comment motiver l’intérêt des élèves pour l’étude de ce théorème ?

Il permet de résoudre des triangles dont on connaît 2 côtés et l’angle formé par ces 2 côtés ou les 3 côtés. Mais pourquoi résoudre des triangles ?

Vous trouverez un élément de réponse en
Annexe 1 :
Une application pratique qui pourrait faire l’objet d’une activité classe : l’expédition de Delambre et Méchain au XVIIIe siècle pour déterminer la longueur du mètre par triangulation.

2. Éléments d’histoire du théorème

2.1 Pourquoi ce théorème porte-t-il son nom en France ?

De nombreux théorèmes portent le nom d’un mathématicien qui n’a pas été celui qui l’a énoncé pour la première fois mais simplement l’un de ceux qui en ont proposé des démonstrations et que l’on veut honorer.

C’est le cas en France pour ce théorème qui ne porte le nom d’al-Kashi que depuis les années 1990 : un inspecteur général, souhaitant rendre hommage aux mathématiciens arabes, le fit introduire sous ce nom dans les programmes.

Avant et aujourd’hui dans la plus part des autres pays on l’appelle « ***le théorème de Pythagore généralisé*** » ou, depuis l’introduction de la trigonométrie, « ***la loi des cosinus*** ».

2.2. Quelques traces du théorème à travers l’histoire

La trace la plus ancienne se trouve dans les **Éléments d’Euclide livre II propositions 12 et 13** (voir la traduction de Bernard Vitrac § 4.2.5).
Au Moyen-âge, le mathématicien et astronome arabe **Al-Battânî** $(\sim 858 - 929)$ le généralisa aux triangles sphériques pour les besoins de l’astronomie.

Le théorème est présent dans de nombreux ouvrages de géométrie dans les siècles suivants tant dans le monde arabe qu’en occident : **Al- Kashi en 1427**, connu en occident (Delambre en fait état) au XIVe siècle grâce à **François Viète**, repris par exemple par **Adrien-Marie Legendre en 1823, …**

En annexe 2 :
Deux exemples de textes historiques courts que l’on peut faire étudier aux élèves.

3. Al-Kashi, sa vie, ses travaux

En annexe 3 : Quelques repères sur les mathématiques arabes

3.1. La biographie de Ghiyath ad-Din Jamshid Mas`ud al-Kashi (1380 – 1429)

Al Kashi est né en 1380 à Kashan (d'où son nom) en Iran et est mort en 1429 à Samarkand dans l'Ouzbékistan actuel.

Après avoir connu des débuts des difficiles dans la pauvreté, c'est en observant l'éclipse de Lune du 4 juin 1406 qu'il décide qu'il sera astronome et donc bien sûr aussi mathématicien. Ses travaux acquièrent une renommée qui parvient à Olug Beg, souverain de Samarkand, lui-même passionné de sciences. Oulug beg invita al-Kashi à venir travailler à Samarkand, à y enseigner et participer à la construction du grand centre scientifique dont il voulait doter sa ville. Al-Kashi participa ainsi à la construction de l'observatoire, en devint le directeur et y travailla jusqu'à sa mort. Reconnu par les autres astronomes qui le nommèrent « **Le deuxième Ptolémée** », deux seulement trouvèrent grâce à ses yeux : Qadi-Zada (1364 – 1436) et Ulug Beg (1374 – 1449).

3.2. Ce que l'on doit à al-Kashi

3.3.1 *La clef de l'arithmétique* (*Miftah al hisab*, 1427)

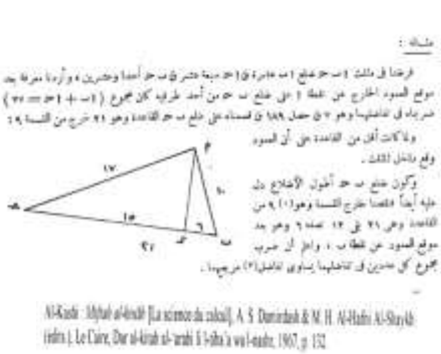
C'est le plus célèbre des quatre ouvrages que nous citons ici.

Cet ouvrage est **une véritable encyclopédie mathématique,** par la richesse de son contenu, la clarté et l'élégance de l'exposition. Il y applique des méthodes arithmétiques et algébriques à la solution de divers problèmes, y compris à plusieurs problèmes géométriques. Ce manuel volumineux est l'un des meilleurs de toute la littérature médiévale. Il témoigne à la fois de l'érudition de l'auteur et de sa capacité pédagogique. Cet ouvrage restera une référence dans les siècles suivants.

Il y effectue des calculs sur les nombres indiens, utilise également les systèmes sexagésimaux et décimaux et les fractions décimales (un siècle avant Stevin !), calcule des racines nièmes (méthode redécouverte plus tard par Ruffini et Hörner), utilise le triangle arithmétique,…

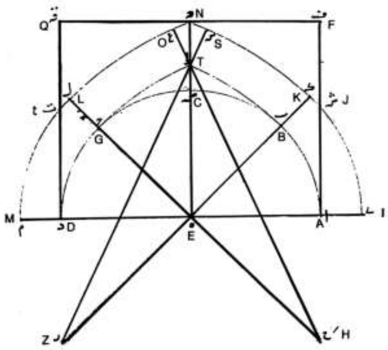
Il y résout des problèmes de géométrie, d'architecture et de finance.

C'est dans cet ouvrage que l'on trouve des résolutions de triangles.



Une résolution de triangle

Un calcul astronomique



Le plan d'un dôme

3.3.2. Traité sur la circonférence (*Risala al-mouhitiah*, 1424)

En prolongeant la méthode d'Archimède (calcul par approximation du périmètre de polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle) avec des polygones à 32 768 côtés, il donne une approximation de 2π donc de π avec une précision égale à neuf chiffres en base 60 soit à 16 décimales !

Ce résultat ne sera surpassé en Europe qu'au dix-septième siècle.

$$\pi \cong 3{,}1415926535897932$$

3.3.3. Traité sur la corde et le sinus (Watar va Jaïb)

C'est son dernier ouvrage, hélas perdu. On ne le connaît que par les commentaires faits après sa mort par *Qadi Zada*. Al Kashi y calcule sin 1° avec une précision de 10^{-17} (mieux que nos calculatrices scientifiques !) puis déduit le reste de la table à l'aide des relations trigonométriques.

$$\sin 1° \approx 0{,}017\ 452\ 406\ 437\ 283\ 571$$

« *On divise d'abord quelques chiffres du nombre par le nombre de choses. On forme le cube du quotient et on l'ajoute au reste du nombre. On divise encore une fois leur somme. On forme le cube de la somme des deux quotients et on ajoute son excès par rapport au cube obtenu d'abord au reste de la somme. On divise ensuite leur deuxième somme encore une fois. On forme le cube de la somme des quotients et on ajoute l'excès de ce cube par rapport au cube de la somme des deux quotients au reste de la deuxième somme. On divise ensuite encore une fois la troisième somme et on procède comme auparavant. L'opération est terminée dès qu'on arrive à ce que l'on veut négliger.* »

Traduction de Youschkevitch, 1976

La table de calcul de sin 1°

En annexe 4 :
L'explication en langage contemporain (compréhensible !) du calcul de sin 1° par al-Kashi

3.3.4. Les tables astronomiques (Zij-e-Khagâni, 1413-1414)

Dans la préface de ce livre, écrit en persan, l'auteur fait l'éloge de Nasir al Tusi (1202 – 1274).

Ces tables furent suivies en **1437** par le « ***Zij-e Sultani*** » (tables astronomiques d'Ulug Beg) écrit avec les astronomes de l'observatoire de Samarkand et dont les principaux contributeurs furent Ulug Beg, al-Kâshi et Qâdi-Zâda.

On y trouve en particulier des tableaux détaillés du mouvement longitudinal du Soleil, de la Lune et des planètes.

4. L'initiation des élèves à l'art de la démonstration

« La personne intelligente qui se sera bien pénétrée des démonstrations saura toujours beaucoup plus facilement retrouver les procédés de ce calcul qu'elle ne saurait servilement retenir ces formules. »

Al-Tusi

Nous vous donnons ici plusieurs démonstrations de ce théorème qu'il est possible de proposer à des élèves.

4.1. Présentation des vidéos

Nous avons réalisé une vidéo montrant deux « **preuves visuelles animées** » qui constituent « un squelette de démonstration » du théorème.

Après leur projection, la **rédaction des démonstrations** peut faire l'objet d'une activité classe dès la classe de seconde car elles n'utilisent que le théorème de Pythagore, la trigonométrie dans le triangle rectangle ou les triangles semblables.

Remarques :

- le professeur peut décider de présenter l'une des preuves ou les deux.

- La deuxième preuve nécessite l'utilisation de la propriété : « deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux » qui ne figure plus dans les programmes actuels. Elle nécessitera donc une explication supplémentaire de la part de l'enseignant(e).

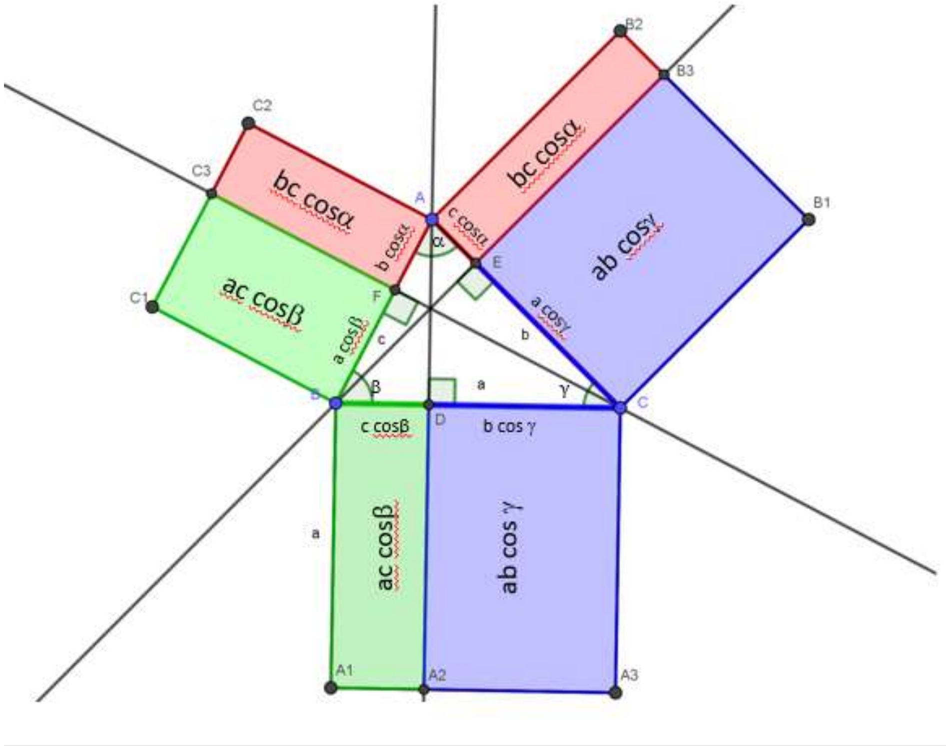
Le théorème étant également au programme de première, travailler sur les démonstrations présentées dans cette vidéo devrait permettre aux élèves de 1ère de mesurer la puissance de ce nouvel outil qu'est le produit scalaire.

4.2. Différentes démonstrations du théorème

4.2.1 : Démonstration de la preuve présentée en vidéo 1

Elle utilise la trigonométrie dans le triangle rectangle le calcul d’aire d’un rectangle

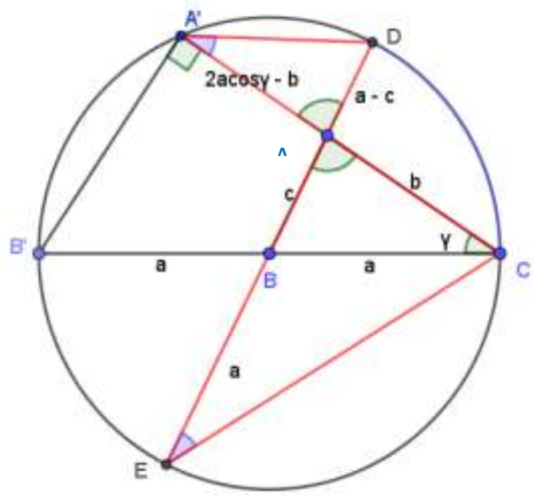
C’est la méthode d’Al-Kashi établissant des égalités d’aires, transposée avec nos notations modernes, accessible dès la classe de seconde.



Dans le triangle ABC, on trace les 3 hauteurs et 3 carrés sur chacun des côtés à l’extérieur du triangle.
Dans le triangle rectangle ADC on a DC = b cosγ   et le carré BA_1A_3C a pour côté a donc l’aire du rectangle DA_2A_3C est ab cosγ
On calcule de même les aires les aires de chacun des autres rectangles.
On constate que les rectangles de même couleur ont la même aire donc l’aire du carré de côté a est égale à l’aire des carrés de côtés b et c moins l’aire des rectangles rouges soit :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$
On obtient de même $b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cos\beta$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos\gamma$

4.2.2 : Démonstration de la preuve présentée en vidéo 2

Elle utilise 3 notions : « un triangle inscrit dans un cercle et dont l'un des côtés est un diamètre est un triangle rectangle », les triangles semblables et le théorème de l'angle inscrit avec sa conséquence : deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux.



On considère le triangle ABC. On trace le cercle de centre B passant par C.

[AB] coupe le cercle en E et [BA] en D, (AC) le recoupe en A' et (BC) en B'.

AD = BD – AB = a – c ; [B'C] est un diamètre donc B'C = 2a

BB' et BE sont des rayons donc ils sont égaux à a et

AE = a + c

Le triangle A'B'C est rectangle car A' est un point du cercle et [B'C] est un diamètre

Donc AC = BC x cos γ = 2a cos γ et AA'= 2a cos γ - b

Considérons les triangles AA'D et AEC.

$\widehat{DAA'}$ et $\widehat{EAC}$ sont égaux car opposés par le sommet

$\widehat{AA'D}$ et $\widehat{CED}$ sont égaux car ce sont des angles inscrits interceptant le même arc

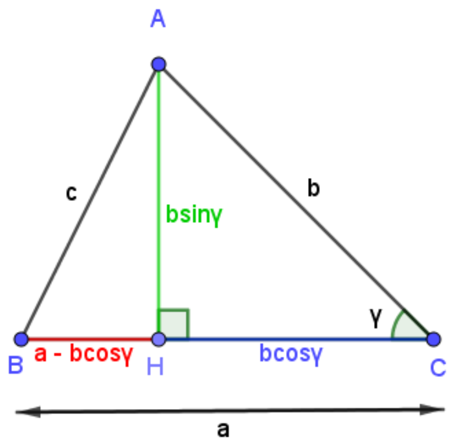
Les 2 triangles ont leurs 3 angles égaux donc ils sont semblables donc

AD x AE = AA' x AC soit $(a - c)(a + c) = (2a\cos\gamma - b)b \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

4.2.3 : Démonstration utilisant les hauteurs du triangle

Elle repose sur le même principe que la démonstration d'Euclide dans propositions 12 et 13 du livre II des Éléments, technique qui a été utilisée au cours des siècles par de nombreux mathématiciens et utilise le théorème de Pythagore dans 2 triangles rectangles.

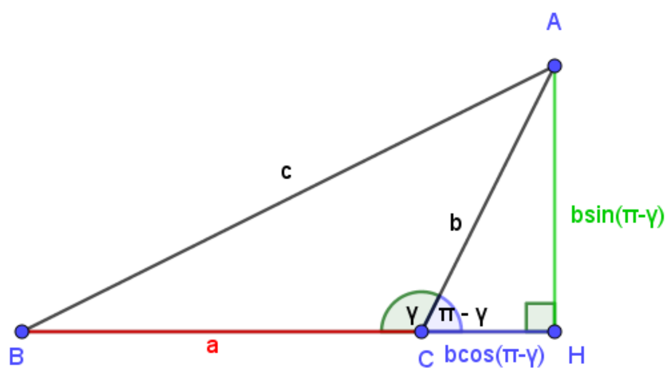
On est obligé d'envisager 2 cas selon que la hauteur issue de A est intérieure ou extérieure au triangle : soit le cas où le triangle est acutangle (l'angle γ est aigu) et le cas où il est obtusangle (l'angle γ est obtus).



$AB^2 = AH^2 + BH^2$

$c^2 = (b\sin\gamma)^2 + (a-b\cos\gamma)^2$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



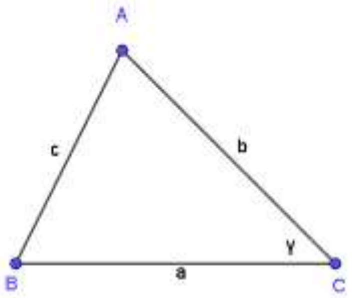
$AB^2 = AH^2 + BH^2$

$c^2 = (b\sin(\pi-\gamma))^2 + (a+b\cos(\pi-\gamma))^2 = (b\sin\gamma)^2 + (a-b\cos\gamma)^2$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

4.2.4 : Démonstration utilisant le produit scalaire

La notion de produit scalaire est à l'origine une notion physique : le produit linéaire. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIX^e siècle par le mathématicien allemand Hermann Grassmann (1809 – 1877) et le physicien américain Josiah Gibbs (1839-1903). C'est le mathématicien irlandais William Hamilton (1805-1865) qui en donna une première définition mathématique en 1853.



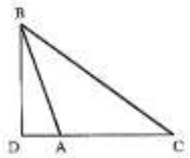
$c^2 = AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\|^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + CA^2$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

4.2.5 : Une approche du théorème par Euclide

On la trouve dans les propositions 12 et 13 du livre II. Comme dans la première démonstration proposée, Euclide y traite séparément le cas d'un triangle possédant un angle obtus) et celui d'un triangle dont tous les angles sont aigus. La lecture, plus ardue, est moins susceptible de motiver les élèves

Proposition 12 du livre II (traduction Bernard Vitrac) :



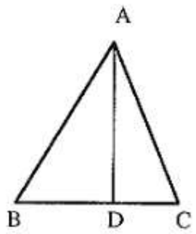
« *Dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l}angle obtus.* »

Soit le triangle obtusangle ABC ayant l'angle sous BAC obtus, et, qu'à partir du point B soit menée BD, perpendiculaire sur CA prolongée.]e dis que le carré sur BC est plus grand que les carrés sur BA, AC de deux fois le rectangle contenu par CA, AD.

En effet, puisque la droite CD a été coupée au hasard au point A, le carré sur DC est donc égal aux carrés sur CA, AD et deux fois le rectangle contenu par CA, AD (II. 4). Que celui sur DB soit ajouté de part et d'autre. Les carrés sur CD, DB sont donc égaux aux carrés sur CA, AD, DB, et à deux fois le [rectangle contenu] par CA, AD. Mais d'une part celui sur CB est égal à ceux sur CD, DB ; en effet l'angle en D est droit (1. 47). Et d'autre part celui sur AB est égal à ceux sur AD, DB. Donc le carré sur CB est égal aux carrés sur CA, AB et deux fois le rectangle contenu par CA, AD.
De sorte que le carré sur CB est plus grand que les carrés sur CA, AB, de deux fois le rectangle contenu par CA, AD.

Donc dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu écoupée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 13 du livre II (traduction Bernard Vitrac) :



« *Dans les triangles acutangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle aigu est plus petit que les carrés sur les côtés contenant l'angle aigu de deux fois le rectangle contenu par celui les côtés de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'intérieur par la perpendiculaire en-deçà de l'angle aigu.* »

Soit le triangle acutangle ABC ayant l'angle en B aigu, et, qu'à partir du point A, soit menée AD perpendiculaire à BC. Je dis que le carré sur AC est plus petit que les carrés sur CB, BA de deux fois le rectangle contenu par CB, BD. En effet, puisque la droite CB a été coupée au hasard en D, les carrés sur CB, BD sont donc égaux à deux fois le rectangle contenu par CB, BD et le carré sur DC (II. 7). Que le carré sur DA soit ajouté de part et d'autre. Les carrés sur CB, BD, DA sont donc égaux à deux fois le rectangle contenu par CB, BD et aux carrés sur AD, DC. Mais d'une part celui sur AB est égal à ceux sur BD, DA; en effet l'angle en D est droit

(I. 47). Et d'autre part celui sur AC est égal à ceux sur AD, DC. Donc ceux sur CB, BA sont égaux à celui sur AC et à deux fois l Soit le triangle acutangle ABC ayant l'angle en B aigu, et, qu'à partir du point A, soit menée AD perpendiculaire à BC. Je dis que le carré sur AC est plus petit que les carrés sur CB, BA de deux fois le rectangle contenu par CB, BD.

En effet, puisque la droite CB a été coupée au hasard en D, les carrés sur CB, BD sont donc égaux à deux fois le rectangle contenu par CB, BD et le carré sur DC (II. 7). Que le carré sur DA soit ajouté de part et d'autre. Les carrés sur CB, BD, DA sont donc égaux à deux fois le rectangle contenu par CB, BD et aux carrés sur AD, DC. Mais d'une part celui sur AB est égal à ceux sur BD, DA; en effet l'angle en D est droit (I. 47). Et d'autre part celui sur AC est égal à ceux sur AD, DC. Donc ceux sur CB, BA sont égaux à celui sur AC et à deux fois le rectangle contenu par CB, BD. De sorte que celui sur AC, seul, est plus petit que les carrés sur CB, BA de deux fois le rectangle contenu par CB, BD.

Donc dans les triangles acutangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle aigu est plus petit que les carrés sur les côtés contenant l'angle aigu de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'intérieur par la perpendiculaire en deçà de l'angle aigu. Ce qu'il fallait démontrer

Source : Bernard Vitrac. *Les éléments, volume 1, livres I à IV : Géométrie plane,* 1990, Bibliothèque d'histoire des sciences, PUF.

ANNEXES

Annexe 1 : Une application pratique de résolution de triangles

De nombreux savants et astronomes qui ont voulu mesurer la terre ou repérer les étoiles l'ont fait par triangulation c'est-à-dire en résolvant des triangles. Le théorème, pouvant se généraliser en géométrie sphérique, est très utile en astronomie.
L'un des exemples les plus fameux a été **l'expédition de Delambre et Méchain pour déterminer la longueur du mètre.** Outre son intérêt pour l'histoire des sciences, elle peut faire l'objet de quelques résolutions de triangles dans une activité classe.

Jean-Baptiste Delambre
(1749 – 1822)

Pierre Méchain
(1744 – 1804)

En 1790, à la demande de l'assemblée, les savants de l'époque se sont entendus pour décider d'une unité étalon, le mètre, remplaçant les différentes mesures de longueur alors existantes : Le mètre sera égal au dix-millionième du quart de méridien terrestre.

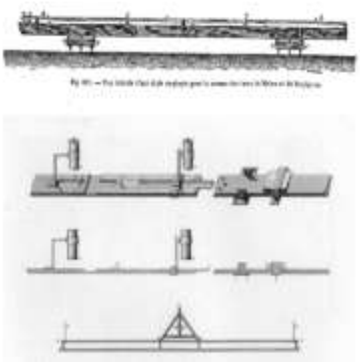
Encore fallait-il mesurer ce quart de méridien !

Les mathématiciens et astronomes Jean-Baptiste Delambre Pierre Méchain se voient confier cette mission.
Delambre et Méchain ont rencontré de nombreuses difficultés et il leur a fallu 6 ans (de 1792 à 1798) pour mener à bien cette mission : Ils sont partis de Dunkerque et sont arrivés à Barcelone, deux villes situées sur le méridien de Paris. Connaissant les latitudes de ces 2 villes, ils ont pu déterminer la longueur de ce quart de méridien.

La méthode a consisté à mesurer (en toises) une suite de 115 triangles le long du méridien de Paris à l'aide d'instruments de mesure d'angles et de longueurs.
Un calcul a permis d'en déduire la longueur du mètre.

Leurs instruments

Cercle répétiteur de Borda et Lenoir
pour mesurer les angles



Règles (laiton et platine) de Borda
et Lenoir pour mesurer les longueurs

Leur parcours

Exemple d'activité classe :
Sur une carte dont on connaît l'échelle, déterminer les distances à vol d'oiseau entre Paris (P) et Versailles (S) puis entre Paris (P) et Créteil 5(C).
Mesurer l'angle $\widehat{VPC}$. En déduire la distance à vol d'oiseau entre Versailles et Créteil puis vérifier sur la carte.

Sur le site du clea (http://clea-astro.eu/lunap/Triangulation/TriangCompl1.html), on trouve la chaîne des triangles de Dunkerque à Barcelone qui pourra vous permettre d'en choisir un tronçon proche de chez vous pour votre activité classe.

Pour en savoir plus sur la mesure de la Terre : http://revue.sesamath.net/spip.php?article765
Mesurer la Terre (protocole de triangulation)

Annexe 2 : Étude de textes historiques courts accessibles aux élèves

L'énoncé de S. F. Lacroix « *Éléments de géométrie à l'usage de l'école centrale* », 1819, p 49 (disponible sur Gallica)

THÉORÈME.

76. *Les trois côtés d'un triangle quelconque étant rapportés à une mesure commune, et exprimés par conséquent en nombres, si de l'extrémité de l'un quelconque de ces côtés, on abaisse une perpendiculaire sur l'un des deux autres, la seconde puissance du premier sera égale à la somme des secondes puissances des derniers, moins deux fois le produit du côté sur lequel tombe la perpendiculaire, par la distance de cette perpendiculaire à l'angle opposé au premier côté, si cet angle est aigu, et plus deux fois le même produit, si cet angle est obtus : c'est-à-dire qu'on aura, dans le premier cas,* fig. 45 *et* 46,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD},$$

et dans le deuxième, fig. 47,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BD}.$$

Démonstration. Quand la perpendiculaire CD, *fig*. 45, partage ABC en deux triangles, ACD et BCD, rectangles en D, le premier donne d'abord, en vertu du n° précédent,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2,$$

et l'on tire du second

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2.$$

D'après cette valeur de $\overline{CD}^2$, celle de $\overline{AC}^2$ devient

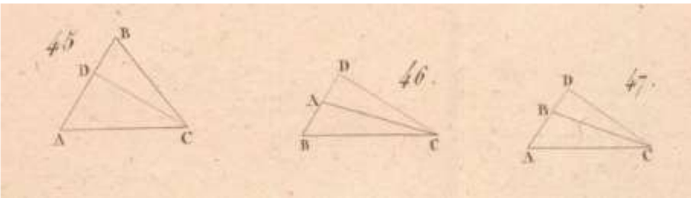
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

mais il est visible que $AD = AB - BD$, nombre dont le quarré est $\overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2$ (*) : mettant cette valeur dans l'expression de $\overline{AC}^2$, on aura enfin

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2,$$

ce qui se réduit à

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD}.$$



Figures en fin d'ouvrage

L'énoncé de A. M. Legendre « *Éléments de géométrie, avec des notes* », 1823, p 73-74 prop. 1 (disponible sur Gallica)

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Dans un triangle ABC, *si l'angle* C *est aigu, le quarré du côté opposé sera plus petit que la somme des quarrés des côtés qui comprennent l'angle* C; *et si l'on abaisse* AD *perpendiculaire sur* BC, *la différence sera égale au double du rectangle* BC × CD; *de sorte qu'on aura*,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times CD.$$

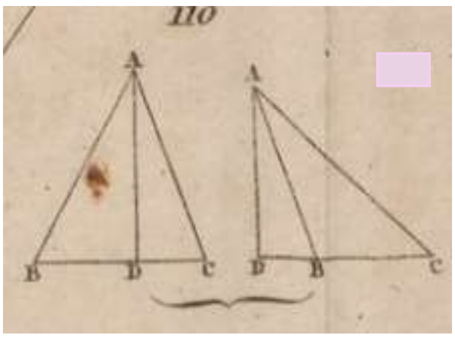
Il y a deux cas. 1° Si la perpendiculaire tombe au-dedans du triangle ABC, on aura BD = BC − CD, et par conséquent * $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\,BC \times CD$.

Ajoutant de part et d'autre $\overline{AD}^2$, et observant que les triangles rectangles ABD, ADC, donnent $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ et $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$, on aura $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,BC \times CD$.

2° Si la perpendiculaire AD tombe hors du triangle ABC, on aura BD = CD − BC, et par conséquent * $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,CD \times BC$. Ajoutant de part et d'autre $\overline{AD}^2$, on en conclura de même,

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,BC \times CD.$$

Figures en fin d'ouvrage



Annexe 3 : Quelques repères sur les mathématiques arabes

L'âge d'or de la civilisation arabe se situe du VII^e siècle au XIII^e siècle. Suite aux multiples conquêtes, cette civilisation s'étend sur une aire géographique immense allant de l'Inde à l'Espagne et comprenant l'Afrique du Nord et l'Italie du Sud.

Il faut donc entendre la science arabe, non comme celle conçue exclusivement par les scientifiques arabes, mais comme étant celle contenue dans les ouvrages scientifiques écrits en langue arabe, langue devenue pendant cette longue période la langue internationale des lettrés et des savants.

La science est une des institutions des cités musulmanes, dont certaines deviennent de vrais foyers du savoir scientifique comme par exemple Bagdad (en Irak actuel), Samarkand autour de l'observatoire (en Ouzbékistan), Cordoue (en Espagne), etc. Les califes se préoccupent de son essor en envoyant des émissaires à la recherche de manuscrits, en constituant des bibliothèques, en fondant des académies, en construisant des observatoires.

Les mathématiciens « arabes » ne se sont pas contentés de diffuser et étudier les mathématiques de leurs prédécesseurs grecs ou indiens : ils ont considérablement augmenté les connaissances mathématiques dans tous les domaines des mathématiques, y compris l'astronomie.

Par exemple, les progrès qu'ils vont réaliser en trigonométrie vont leur permettre de dresser des tables astronomiques de plus en plus précises. Le rite religieux islamique (heures des prières, direction de la Mèque, …) stimula leurs recherches parce qu'elles permettaient d'en respecter les règles avec toujours plus de précision.
Notons que, depuis les travaux du mathématicien indien Aryabhata (476-550), le cosinus, le sinus et la tangente étaient à l'époque convenablement définis ainsi que et des formules de trigonométrie (somme, duplication, …).

Annexe 4 : Méthode d'approximation de sin 1° par Abu'l Xafa et Al-Kashi

Trois siècles plus tôt, utilisant les connaissances sur les triangles équilatéraux et les pentagones réguliers, **Abu'l Wafa** (940-998) partit des valeurs connues de sin 60◦ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$) et sin 72◦ ($\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$), puis, à l'aide de la formule donnant sin(a-b) , détermina sin 12◦.
Enfin, grâce à la formule de l'arc moitié, il descendit jusqu'à sin 1◦30′ et sin 45′.

Ces deux angles étant très proches, il supposa que les valeurs intermédiaires étaient approximativement données par une relation linéaire et aboutit à la valeur de sin 1◦,
par une simple règle de trois.

Il atteignit ainsi une précision de **5 positions sexagésimales, soit 8 décimales**.

Al Kashi utilisa la formule de l'angle triple (sin 3θ = 3 sin θ − 4 sin^3 θ) et de la valeur connue de sin 3◦. En posant x = sin 1°, il obtint une équation cubique de la forme

$x^3 + q = px$, soit $x = \dfrac{q+x^3}{p}$

Son idée novatrice fut de vouloir résoudre cette équation par approximation successives.
Il posa $x_1 = \frac{q}{p}$ et $x_n = \frac{q+x_{n-1}^3}{p}$ et calcula les termes de cette suite récurrente jusqu'à obtenir **une approximation à 10^{-17} près !**

Bibliographie

- Ahmed Djebbar, *L'âge d'or des sciences arabes*, Paris, Éditions Le Pommier, Cité des sciences et de l'industrie, coll. « Le Collège » (nº 15), 2013

- Ahmed Djebbar, *Une histoire de la science arabe*, ed. Le Seuil, 2001

- Roshdi Rashed, *Histoire des sciences arabes, tome 1, astronomie théorique et appliquée*, édition Le Seuil, 1997

- Roshdi Rashed, *Histoire des sciences arabes, tome 2, mathématiques et physique*, édition Le Seuil, 2003

- Adolf Youschkevitch *Les mathématiques arabes VIIIe -XVe siècles*, ed. Vrin, 1976

Sitographie

- https://www.youtube.com/watch?v=U3KRBb9WJpY : l'épisode de la série « *Les savants de l'Islam* » sur al-Kashi par le professeur Ahmed Djebbar, spécialiste des sciences arabes.

- http://www.teheran.ir/spip.php?article2824#gsc.tab=0 : article sur al-Kashi de la revue culturelle mensuelle de Téhéran en langue française.

- https://www.hist-math.fr/recits/kashi.html : la page sur le théorème d'al-Kashi de ce site bien documenté sur l'histoire des mathématiques.