Faculté des sciences
Aix Marseille Université
Département IRES

Institut de Recherche de l'Enseignement des Sciences

Groupe Histoire et Epistémologie des Sciences

Fascicule pour le professeur : les mathématiques en Chine ancienne

« Ce sont des mathématiques, Jim, mais pas comme nous les connaissons »
Docteur SPOCK, « *Star Treck* »

Table des matières

1. Pourquoi introduire une perspective historique dans nos programmes ? **1**

2. Introduction **2**

3. Les mathématiques chinoises sous la dynastie Han (-206 ; +220) **3**

3.1 Le Zhoubi Suanjinj (Le classique mathématique du Gnomon des Zhou) **3**

3.2 Le Jiuzhang Suanshu (Les Neuf chapitres sur l'art mathématique) (JZSS)........... **4**

3.3 Les mathématiciens chinois précurseurs avant le IV^e^ **5**

3.4 Les mathématiques chinoises connues en précurseurs après le IV^e^ **7**

4.1. Présentation des vidéos **7**

4-2 Fiche « élèves » **7**

5.1 Annexe 1 : une chronologie des mathématiques chinoises **8**

5.2 Annexe 2 : Une fiche élèves **10**

6. Bibliographie – Sitographie **11**

1. Pourquoi introduire une perspective historique dans nos programmes ?

« Elle peut permettre aux élèves de mieux saisir le sens et la portée des notions et des problèmes étudiés, et de mieux comprendre les ressorts du développement scientifique »

Elle peut permettre aux élèves de se poser la question du « *pourquoi »* plutôt que celle du « *comment »*.

2. Introduction

Pour une grande majorité d'entre nous, les mathématiques en Chine ancienne sont méconnues au profit des mathématiques grecques et arabes dont elles sont très différentes ; mais pour autant doivent-elles être méconnues voire « méprisées » **?** En effet on a longtemps pensé que les mathématiciens chinois s'étaient bornés à développer des techniques élémentaires, pour le calcul des impôts ou l'établissement du calendrier, alors qu'ils étaient des précurseurs dans de nombreux domaines : en arithmétique, en dénombrement, en calcul algébrique. Les savants chinois avaient déterminé les six premières décimales du nombre « pi » plus de mille ans avant les Occidentaux ; l'« art de l'inconnue céleste », une des premières formes d'algèbre, permettait de résoudre des systèmes d'équations algébriques ; les notions d'infini et de limite étaient déjà employées au IIIe siècle de notre ère…De plus, les mathématiques en Chine ancienne ont été marquées par le confucianisme et les différents apports culturels venant d'Inde.

Les mathématiciens, nourris de la pensée grecque, ont imposé le principe selon lequel on ne peut pas concevoir de mathématique dépourvue de définitions, d'axiomes, de raisonnement hypothético-déductifs comme on les trouve dans Les Éléments d'Euclide. En Chine ancienne, les mathématiciens ne font pas de démonstrations mais écrivent des procédures (algorithmes) puis quelques siècles plus tard des commentaires, qui tiennent lieu de validation (correction d'algorithme). Ils détestent la lourdeur des raisonnements formels et préfèrent se faire comprendre à demi-mot. Leur mathématique repose sur la manipulation d'instruments[1] pour effectuer des opérations courantes, mais aussi pour exécuter des algorithmes complexes sur les polynômes, sur la résolution d'équations numériques.

Coffret de baguettes

Table à compter avec des baguettes

[1] Baguette, boulier et plus tard le compas de Galilée, les réglettes de Néper, la règle à calcul (XVIIe)

Vous trouverez en Annexe une chronologie des mathématiques chinoises. Dans ce qui suit, nous nous attardons sur les mathématiques sous la dynastie Han.

3. Les mathématiques chinoises sous la dynastie Han (-206 ; +220)[2] :

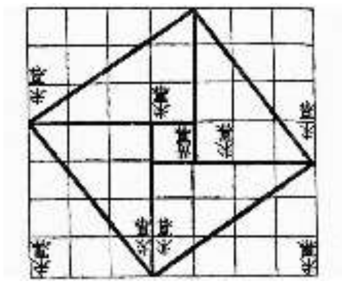
Les premières sources de notre savoir sur les mathématiques chinoises datent de l'unification de l'empire chinois par le 1er empereur Qin (bien connu par les soldats de pierre à Xianyan).

Il instaure un système bureaucratique ; la nécessité de former les hauts fonctionnaires va se traduire par l'écriture d'ouvrages pratiques et pédagogiques. La dynastie Han qui lui succède, maintient le système bureaucratique.

D'où la nécessité de disposer d'ouvrages mathématiques et astronomiques. Ceux-ci se présentent sous forme d'énoncés de problèmes de tous les jours suivis de méthodes pour résoudre ces problèmes concrets : finances, arpentage, commerce... On n'y trouve pas de théories mathématiques abstraites. Et ceci perdurera pendant les deux millénaires suivants. Ces ouvrages ont été compilés au début de la dynastie Tang (vers 750) sous le nom de « ***Les dix classiques du calcul*** *(Suanjing shi shu)* » à partir de textes anciens ou modernes. Parmi eux :

3.1 Le Zhoubi Suanjinj (Le classique mathématique du Gnomon des Zhou)

C'est un important ouvrage, commencé sous la dynastie des Zou (-1046 ; -256)
puis complété sous la dynastie Han (-206 ; +220). Il était principalement destiné à l'astronomie chinoise. On y trouve :
- la numération décimale de position,
- les 4 opérations sur les fractions,
- l'extraction de la racine carrée,
- le théorème de Pythagore pour des triangles rectangles de côtés 3-4-5 et 6-8-10
- la similitude pour des triangles rectangles.



« *La figure de l'hypoténuse* »
ou « *xian tu* »

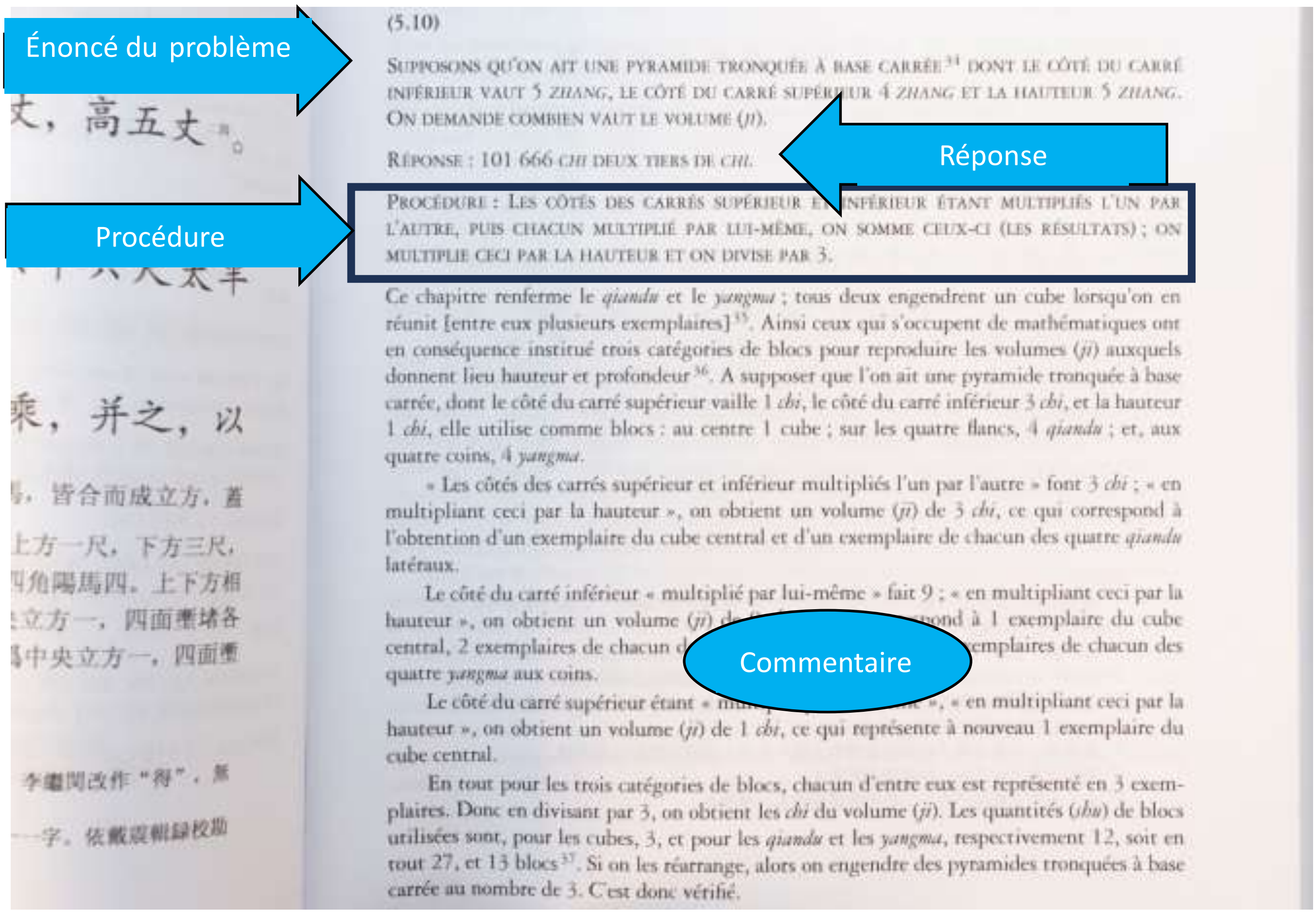
Plus tard, dans les commentaires de **Zhao Shuang** (fin du IIIe), on y trouvera une liste de 15 formules pour résoudre les triangles rectangles. C'est sur l'un de ces commentaires qu'est construite la **1ère preuve visuelle de la vidéo**.
Il contient aussi la figure de l'hypoténuse qui fournit une preuve visuelle sans explication du théorème de Pythagore.

[2] Ce fascicule est largement inspiré des articles de Arnaud Gazagne, cités dans la bibliographie

3.2 **Le Jiuzhang Suanshu** (Les Neuf chapitres sur l'art mathématique) (JZSS)

Comme pour le Gnomon des Zhou, cet ouvrage a été écrit à partir de documents transmis de siècle en siècle par copie. Il présente les connaissances mathématiques de l'époque, non pas sous forme de théorème mais sous forme de problèmes pratiques avec des procédures de calcul (algorithmes) : ces 246 problèmes sont regroupés par rubriques à visées utilitaires (arpentage des champs, échanges de marchandises, travaux de terrassement, impôts et corvées, mesures de distance sur le terrain, calcul des payes des fonctionnaires[1] en grains, etc).

Tous ces problèmes ont la même présentation ***: énoncé, réponse, procédure de calcul, suivis par des commentaires*** (notamment de **Liu Hui (III^e)** mais aussi **Li Chunfeng au VII^e**) contenant des justifications rationnelles.



(5.10)

SUPPOSONS QU'ON AIT UNE PYRAMIDE TRONQUÉE À BASE CARRÉE[34] DONT LE CÔTÉ DU CARRÉ INFÉRIEUR VAUT 5 *ZHANG*, LE CÔTÉ DU CARRÉ SUPÉRIEUR 4 *ZHANG* ET LA HAUTEUR 5 *ZHANG*. ON DEMANDE COMBIEN VAUT LE VOLUME (*JI*).

RÉPONSE : 101 666 *CHI* DEUX TIERS DE *CHI*.

PROCÉDURE : LES CÔTÉS DES CARRÉS SUPÉRIEUR ET INFÉRIEUR ÉTANT MULTIPLIÉS L'UN PAR L'AUTRE, PUIS CHACUN MULTIPLIÉ PAR LUI-MÊME, ON SOMME CEUX-CI (LES RÉSULTATS) ; ON MULTIPLIE CECI PAR LA HAUTEUR ET ON DIVISE PAR 3.

Ce chapitre renferme le *qiandu* et le *yangma* ; tous deux engendrent un cube lorsqu'on en réunit [entre eux plusieurs exemplaires][35]. Ainsi ceux qui s'occupent de mathématiques ont en conséquence institué trois catégories de blocs pour reproduire les volumes (*ji*) auxquels donnent lieu hauteur et profondeur[36]. A supposer que l'on ait une pyramide tronquée à base carrée, dont le côté du carré supérieur vaille 1 *chi*, le côté du carré inférieur 3 *chi*, et la hauteur 1 *chi*, elle utilise comme blocs : au centre 1 cube ; sur les quatre flancs, 4 *qiandu* ; et, aux quatre coins, 4 *yangma*.

« Les côtés des carrés supérieur et inférieur multipliés l'un par l'autre » font 3 *chi* ; « en multipliant ceci par la hauteur », on obtient un volume (*ji*) de 3 *chi*, ce qui correspond à l'obtention d'un exemplaire du cube central et d'un exemplaire de chacun des quatre *qiandu* latéraux.

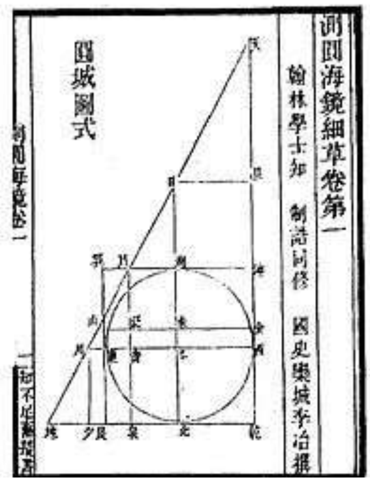
Le côté du carré inférieur « multiplié par lui-même » fait 9 ; « en multipliant ceci par la hauteur », on obtient un volume (*ji*) de [illegible]ond à 1 exemplaire du cube central, 2 exemplaires de chacun d[illegible]emplaires de chacun des quatre *yangma* aux coins.

Le côté du carré supérieur étant « m[illegible] », « en multipliant ceci par la hauteur », on obtient un volume (*ji*) de 1 *chi*, ce qui représente à nouveau 1 exemplaire du cube central.

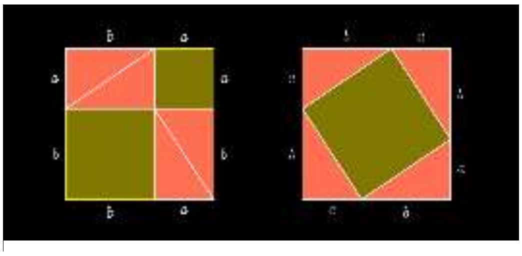
En tout pour les trois catégories de blocs, chacun d'entre eux est représenté en 3 exemplaires. Donc en divisant par 3, on obtient les *chi* du volume (*ji*). Les quantités (*shu*) de blocs utilisées sont, pour les cubes, 3, et pour les *qiandu* et les *yangma*, respectivement 12, soit en tout 27, et 13 blocs[37]. Si on les réarrange, alors on engendre des pyramides tronquées à base carrée au nombre de 3. C'est donc vérifié.

Remarque : Les énoncés et les réponses sont des cas particuliers mais les procédures et les commentaires sont traités dans le cas général.

Ces commentateurs ont validé les procédures données, c'est-à-dire qu'ils ont donné la correction de ces algorithmes. Par exemple, Liu Hui explique des résultats d'algèbre élémentaire et de géométrie (théorème de Pythagore, diamètre du cercle inscrit dans un triangle, identités remarquables, …) en se servant du principe de l'invariance de l'aire ou du volume d'une figure par fragmentation et réassemblage des divers morceaux. Ils utilisent aussi des pièces colorées rouges, bleues et jaunes.

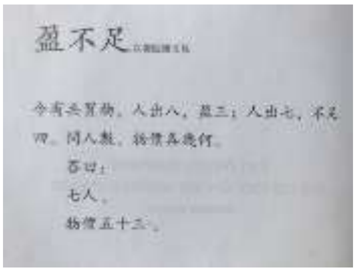


Diamètre du cercle inscrit



$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

On y trouve les méthodes connues dans d'autres civilisations de l'Antiquité, par exemple la *méthode de fausse position* (problème 1 du chapitre 7 du JZSS) qu'on trouve aussi en Mésopotamie sur la tablette de Suze (BM 13901) vers 1800 avant notre ère, qu'on trouve aussi en Égypte sur le papyrus de Rhind (problème 24, 1650 avant notre ère), mais aussi plus tard en Inde (Bhaskara au XIIe).



JZSS pb 7-1

BM 13901

Papyrus de Rhind, pb 26

Liu Hui (III^{e}) approche l'aire du cercle par celle d'une suite de polygones réguliers de $6x2^n$ côtés et encadre pi à 3 décimales près. Il énonce le principe dit « de Cavalieri ». Deux siècles plus tard, Zu Chongzhi améliore et en déduit l'excellente approximation pi = 355/113 dite de « Métius »(1586).

Dans *Les Neuf chapitres sur l'art mathématique,* le 9ème chapitre est consacré à la résolution d'un triangle rectangle, appelée procédure du Gougu[3] (théorème de Pythagore et sa réciproque). C'est sur le problème 9-1[4] que repose **la 2ème preuve visuelle de la vidéo**.

On y trouve des triplets pythagoriciens ; les chinois ont appliqué leurs connaissances géométriques à divers domaines, y compris l'astronomie et l'ingénierie.
On y trouve aussi l'algorithme d'Euclide

3.3 Les mathématiciens chinois précurseurs avant le IVe

A cette époque, les chinois sont les seuls par exemple

- à savoir *résoudre un système numérique de n équations du 1er degré par une réduction semblable à la méthode de Gauss*,
- à maîtriser *l'addition et la soustraction de nombres négatifs* (à l'aide de baguettes noires et rouges),
- à maîtriser *l'addition de fractions*,
- à savoir *résoudre une équation du second degré*
- à savoir *extraire une racine carrée*.

La numération utilisée est une numération décimale de position.

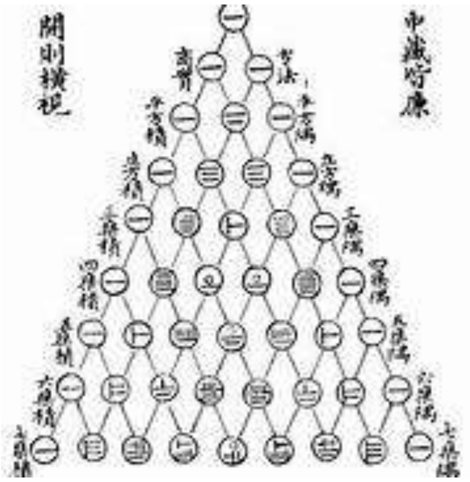
[3] Les problèmes **3,6,8,7,12,11**

[4] Commentaire de Liu Hui du pb 9-1 : *La base multipliée par elle-même fait un carré vermillon, la hauteur multipliée par elle-même un carré bleu-vert, et l'on fait en sorte que ce qui sort et ce qui entre se compensent l'un l'autre, que chacun se conforme à sa catégorie ; alors, sur la base du fait que l'on garde ceux (les parties, les morceaux) qui restent sans les bouger, on engendre par réunion l'aire du carré de côté l'hypoténuse.*

3.4 Les mathématiciens chinois précurseurs après le IV^{e}

Au Ve, justification du calcul de la sphère en appliquant le principe dit de Cavalieri (XVIIe)

- Au VIIe, résolution d'équations cubiques de la forme *: $x^3 +px^2+qx =N$*
- Vers les XI^{e}-XII^{e}, le triangle dit de Pascal apparaît en Chine pour le calcul des coefficients de $(a+b)^n$ sans aucun lien avec la combinatoire.



- Au XIII^{e}-XIV^{e}, sous la dynastie mongole des Yuan**,** développement d'une algèbre de polynômes jusqu'à 4 inconnues.
-
- Du VII^{e} au XVI^{e}, création et développement de la trigonométrie et d'une algèbre proprement chinoise

4. L'initiation des élèves à l'art de la démonstration

4.1. Présentation des vidéos

Nous avons réalisé une vidéo montrant deux « **preuves visuelles animées** » qui constituent chacune « un squelette de démonstration » du théorème.
Après leur projection, la **rédaction des démonstrations** peut faire l'objet d'une activité classe durant laquelle le professeur pourra faire des arrêts sur image, des retours en arrière, …

4-2 Fiche élèves

Vous trouverez, en annexe 2, une proposition de fiche de la 2ème preuve de la vidéo (preuve due à Liu Hui (III^{e})

Annexe1

Chronologie des mathématiques[5] :

XIV^{e} -XI^{e} avant notre ère : inscriptions sur os et écailles. Utilisation d'une numération décimale « hybride ».

Début de notre ère : Opérations sur des grands nombres et sur les fractions. Les chinois sont d'habiles calculateurs.

Dynastie Han (-206 ; +220) : elle favorise l'écriture d'ouvrages pratiques et pédagogiques dont le **Jiuzhang Suanshu** (Les Neuf chapitres sur l'art mathématique) (JZSS)

Au V^{e} : Zu Kengzhi justifie le calcul de la sphère en appliquant le principe dit de Cavalieri

Dynastie Tang (618-907) : Compilation (vers 750) des ouvrages anciens sous le nom : « ***Les dix classiques du calcul*** *(Suanjing shi shu)* »
Au début du VII^{e}, Wang Xiaotong connait l'équation du 3ème degré

Sous la dynastie mongole des Yuan (1271-1368) : développement d'une algèbre de polynômes jusqu'à 4 inconnues dont la généralisation a conduit à la découverte des déterminants fin du XIIe.

Jusqu'au XIV^{e} les ouvrages sont majoritairement des commentaires des ouvrages des siècles antérieurs.

Vers les XI^{e}-XII^{e}, le triangle dit de Pascal apparaît en Chine pour le calcul des coefficients de $(a+b)^n$ sans aucun lien avec la combinatoire.

A partir du XIII^{e} : les mathématiques chinoises déclinèrent au profit d'une mathématique du commerce. Elles n'étaient considérées qu'à partir du moment où elles débouchaient sur des résultats pratiques.

Du VIIe au XVI^{e} : création et développement d'une algèbre proprement chinoise et premières apparitions de trigonométrie.

Dynastie des Qing (à partir du XVII^{e}) : A partir du XVII^{e}, nouvel élan grâce à l'arrivée des jésuites à la cour ; les ouvrages européens atteignent la Chine, en particulier les Éléments d'Euclide traduits par le jésuite Matteo Ricci et Xu Guangqi (1607) à partir d'un manuel de Clavius. Ce n'est qu'à partir de cette traduction que la géométrie déductive commence à être connue. Mais les mathématiciens chinois vont rester très réservés sur la trame discursive de ces ouvrages, trop proche de la philosophie et de la théologie enseignées par les missionnaires en Chine.

---

[5] Cette annexe contient des extraits de l'article d'Arnaud Gazagne « *Procédés calculatoires en Chine ancienne* » (cf bibliographie)

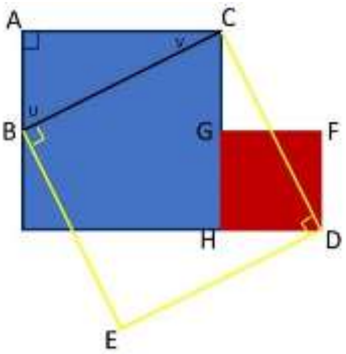
D'autre part, les mathématiciens chinois vont emprunter à l'Europe de nombreuses techniques de calcul : calcul écrit, réglette de Néper. Les figures géométriques accompagnent désormais les écrits.

Mei Wending (1633-1721), considéré comme le plus grand mathématicien de son époque et même plus, est connu pour son implication dans la réforme du calendrier ; mais aussi parce qu'il développe la planimétrie et la trigonométrie sphérique. Il reconnait la valeur des méthodes occidentales en sciences mathématiques.

Début du XX^e^ : apparition des chiffres arabes dans les textes chinois.

Annexe 2 : Fiche élève

Théorème du Gougu de Liu Hui (IIIe siècle)



Rappels sur la construction :
- Soit *u* et *v* les angles non droits du triangle rectangle ABC
- Un carré rouge a été construit sur le côté AB et a été déplacé en GFDH ; le carré bleu a été construit sur le côté AC
- les angles en B et D du quadrilatère BCDE sont droits

1ère étape : Nous allons montrer que le quadrilatère jaune est le carré construit sur l'hypoténuse BC du triangle ABC.

1 – Montrer que le triangle CHD est égal au triangle ABC

2- En déduire que BC = CD

3- Montrer que chaque angle des triangles de cette figure est soit un angle droit, soit égal à *u*, soit égal à *v*

5- En déduire que l'angle BCD est droit

6- En déduire que le quadrilatère BCDE est un carré

2ème étape

1- En suivant la vidéo, justifier que pour chaque « sort-entre », le triangle qui sort rentre bien dans l'emplacement qui lui est assigné.

2- Conclure que l'aire du carré jaune bien égal à la somme des aires des carrés bleu et rouge.

3- Si a, b, c désignent les longueurs des côtés du triangle rectangle ABC d'hypoténuse BC, conclure que :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bibliographie :

Évelyne BARBIN : *Démonstration grecque et démonstration chinoise : Une opposition entre le discursif et le visuel,* IUFM de la Réunion Saint-Denis , 1998 ; https://publimath.fr/iru98024/

Karine CHEMLA, Guo SHUCHUN : *Les Neufs chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* **(**Jiuzhang Suanshu / les Neuf chapitres), éditions Dunod, (1136 pages) 2004.

CLASSIQUE KANGOUROU N°4, Les éditions du Kangourou : *Les neuf chapitres, extraits du neuvième chapitre*, préface de Karine CHEMLA, commentaires de André DELEDICQ, (64 pages) 2013.

Arnaud GAZAGNES : *Procédés calculatoires en Chine ancienne* ; préface de Frédéric METIN ; Introd. de Jean-Claude MARTZLOFF*,* IREM de Reims 2005 ; https://publimath.fr/ire05001/

Arnaud GAZAGNES : *Petites promenades mathématiques en chine ancienne ;* IREM de Reims 2017 ; https://publimath.fr/ire17002/

Arnaud GAZAGNES : *Exemples de démonstration en mathématiques chinoises*. Bulletin de l'APMEP. N° 424. p. 642-644. https://publimath.fr/aaa99225/

Jean-Claude MARTZLOFF : Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Besançon, 1990. https://publimath.fr/iwh90008/

Jean-Claude MARTZLOFF : *Recherche sur l'œuvre mathématique de Mei Wending (1633-1721)* ; Mémoires de l'Institut des Hautes Etudes Chinoises ; Vol XVI ; Collège de France, 1989 (ISBN 2-85757-022-8)

Vidéos de conférences :

K. Chemla, *En quoi les mathématiques chinoises sont-elles des mathématiques ?* (2009), https://www.youtube.com/watch?v=6wG_oLSj0Kw

K.Chemla, *Quoi de neuf dans les mathématiques de la Chine ancienne ?*, Agora des savoirs, (2016), https://www.youtube.com/watch?v=QLeQpGcLQG0